

Lecția 1: Bazele Geometriei în Planurile Cadastrale

Obiective: Elevii vor înțelege elementele geometrice fundamentale din cadastru, vor calcula perimetre, arii și unghiuri, și vor vedea aplicația lor directă în cartografie.

I. PARTEA TEORETICĂ

1. Ce este Cadastrul și De Ce Avem Nevoie de Matematică?

Cadastrul este sistemul de evidență al tuturor terenurilor dintr-o țară. Este ca un registru național al proprietăților. Fără el, nu am ști cu exactitate unde începe și unde se termină terenul fiecăruia.

De ce matematică? Pentru că terenurile au forme neregulate, iar pentru a le descrie precis avem nevoie de:

- Coordonate (ca în sistemul cartezian)
- Distanțe (lungimi de laturi)
- Unghiuri (orientare)
- Arii (suprafață)

Fără calcule matematice precise, planurile cadastrale ar fi doar schițe aproximative, iar disputele între vecini ar fi foarte multe.

2. Elementele Geometrice de Bază în Cadastru

A) PUNCTUL CADASTRAL (Punct de Hotar)

Definiție: Un punct cadastral este un punct fix, permanent și precis determinat, care definește o schimbare de direcție în limita unei proprietăți. Este vârful poligonului care reprezintă conturul terenului.

Materializare pe teren:

- Borne cadastrale (de beton, metal)
- Țăruși metalici
- Colțuri de zidărie
- Semne gravate în piatră

Exemplu concret: În curtea școlii, punctele A, B, C, D la colțurile terenului de sport sunt puncte cadastrale. Dacă vrem să măsurăm exact terenul, pornim de la aceste puncte.

Reprezentare pe plan: Pe planul cadastral, punctele sunt notate cu litere sau numere și au coordonate precise.

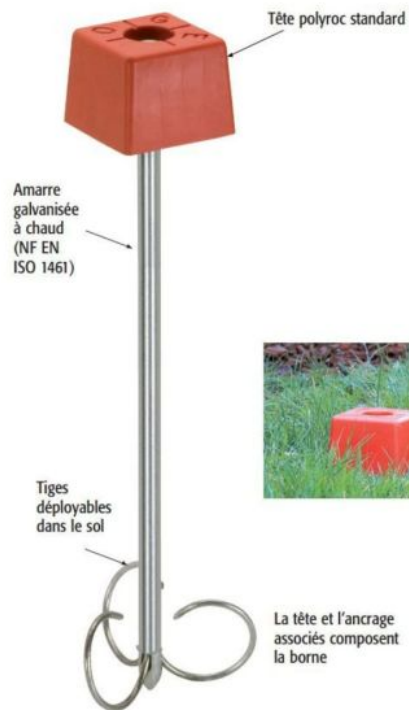


Figura 1: Bornă cadastrală modernă cu număr de identificare.

B) LATURA (Linia de Hotar)

Definiție: Segmentul de dreaptă care unește două puncte cadastrale consecutive. Reprezintă limita fizică, vizibilă și măsurabilă dintre proprietăți.

Caracteristici:

- Are lungime exactă (în metri)
- Are o orientare precisă (azimut)
- Poate fi dreaptă sau curbă (dar în geometrie simplă o aproximăm cu segment)

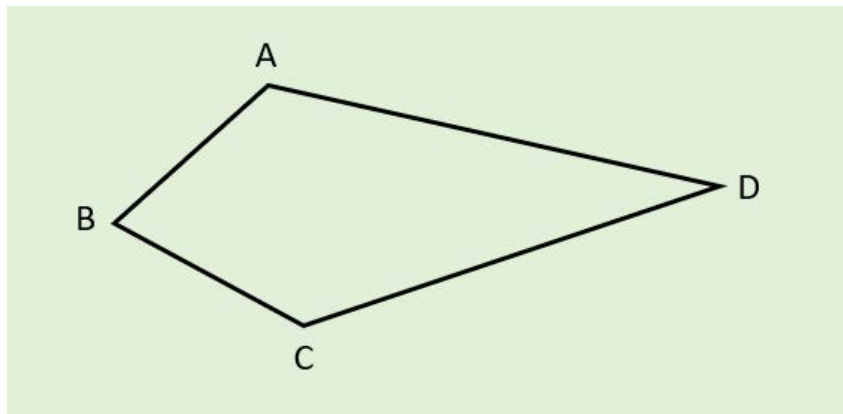


Figura 2: Teren patrulater cu laturile AB, BC, CD, DA.

Exemplu concret: Gardul dintre două grădini reprezintă o latură de hotar. Lungimea gardului este lungimea laturii.

Calcul important: Suma lungimilor tuturor laturilor = **PERIMETRUL** terenului.

$$P = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n$$

C) UNGHIUL ȘI AZIMUTUL – Orientarea pe Teren

Problema: Cum descriem direcția unei laturi pe o hartă?

Definiție AZIMUT (Az): Unghiul orizontal măsurat de la direcția NORD geografic către latura respectivă, în sensul acelor de ceasornic, având valori de la 0° la 360° .

Sistemul de referință:

- Nord (N) = 0° sau 360°
- Est (E) = 90°
- Sud (S) = 180°
- Vest (V) = 270°

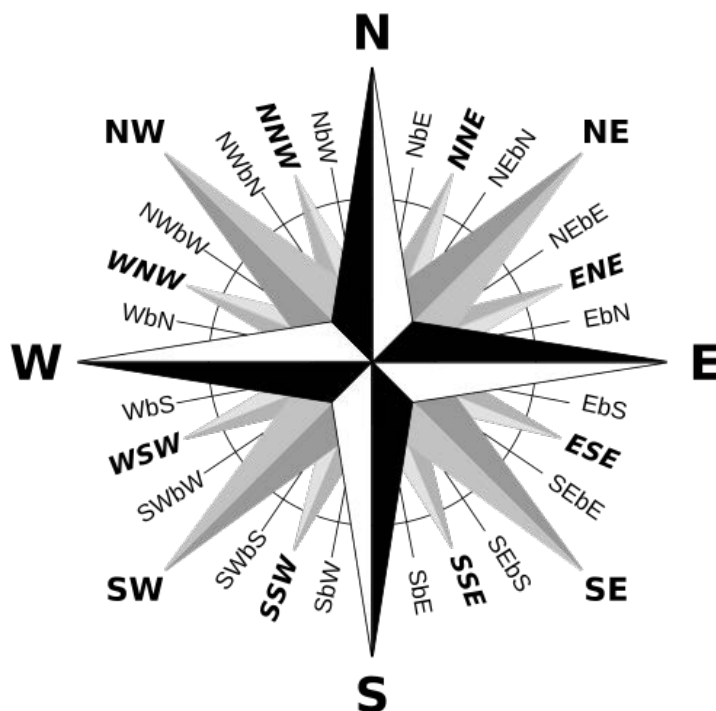


Figura 3: Roza vânturilor cu azimuturi.

Exemplu concret 1: Dacă stai cu fața spre Nord și te întorci spre dreapta (Est) până te uiți exact spre o bornă, unghiul de rotație este azimutul către borna respectivă.

Exemplu concret 2: Pe un plan cadastral vei citi: “Lat. AB = 25.30 m, Az = $125^\circ 15'$ ” - adică latura are 25,30 metri și este orientată la 125 grade și 15 minute de la Nord.

Calcul important – Azimutul invers:

$$Az_{invers} = Az_{direct} + 180^\circ \quad (\text{dacă } Az_{direct} < 180^\circ)$$

$$Az_{invers} = Az_{direct} - 180^\circ \quad (\text{dacă } Az_{direct} \geq 180^\circ)$$

Exemplu: Azimutul de la X la Y este 65° . Azimutul de la Y la X = $65^\circ + 180^\circ = 245^\circ$.

D) SUPRAFAȚA (Aria Terenului)

Importanță: Aria determină:

- Impozitul pe teren
- Potențialul de construcție (indicele de utilizare)
- Valoarea de piață

Formule de bază:

Formă geometrică	Formula ariei	Exemplu
Dreptunghi	$A = L \times l$	$30m \times 40m \Rightarrow A = 1200 m^2$
Pătrat	$A = l^2$	$l = 25m \Rightarrow A = 625 m^2$
Triunghi dreptunghic	$A = \frac{c_1 c_2}{2}$	$12m, 16m \Rightarrow A = 96 m^2$
Triunghi oarecare	$A = \frac{bh}{2}$	$b = 20m, h = 15m \Rightarrow A = 150 m^2$

3. De la Teorie la Plan Cadastral Real

Elementele vizibile pe plan:

- Conturul terenului ca poligon
- Numere/litere la fiecare vârf (puncte cadastrale)
- Cote de dimensiune pe laturi
- Simbolul Nordului
- Numărul cadastral al terenului
- Scara planului (1:500)

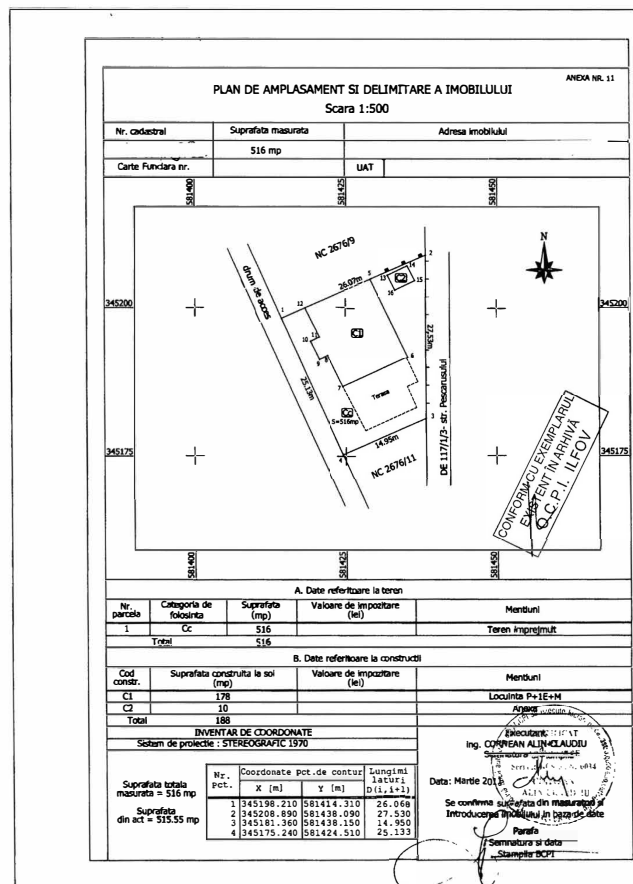


Figura 4: Exemplu de plan cadastral simplificat cu elementele vizibile.

II. EXEMPLU REZOLVAT COMPLET

Problema: Un teren are forma unui triunghi dreptunghic ABC. Măsurătorile topografice arată:

- Latura AB are azimutul 0° (orientată exact spre Nord) și lungimea 50.0 metri
- Latura BC este perpendiculară pe AB și are 70.0 metri

Cerințe:

- 1) Reprezentați schematic terenul
- 2) Calculați ipotenuza AC
- 3) Calculați perimetrul
- 4) Calculați suprafața
- 5) Determinați azimutul de la C la A

REZOLVARE DETALIATĂ:

Pasul 1: Reprezentarea Schematică

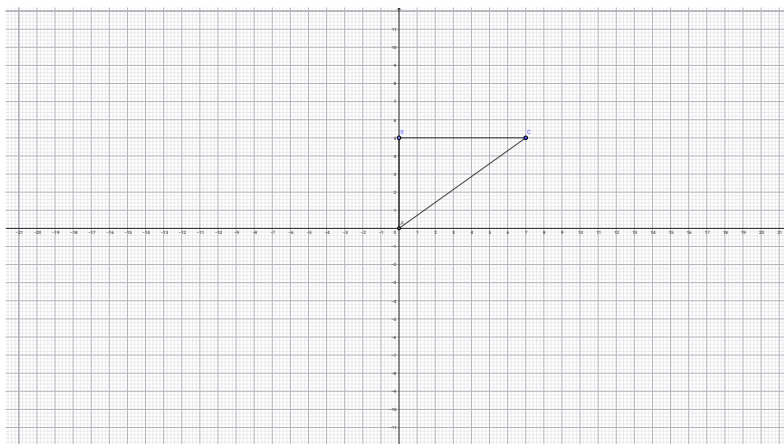


Figura 5: Reprezentarea terenului triunghiular.

Explicație desen:

- Din A mergem spre Nord 50m $\Rightarrow$ ajungem în B (pentru că $Az_{AB} = 0^\circ$)
- Din B, pentru că BC este perpendiculară pe AB și $Az_{AB} = 0^\circ$ (Nord), perpendiculara este spre Est (90°). Mergem 70m spre Est $\Rightarrow$ ajungem în C
- Unim C cu A pentru a închide triunghiul

Pasul 2: Calculul Ipotenuzei AC Triunghiul ABC este dreptunghic în B. Aplicăm Teorema lui Pitagora:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 50^2 + 70^2 = 2500 + 4900 = 7400$$

$$AC = \sqrt{7400} \approx 86.02 \text{ m}$$

Verificare rapidă: $\sqrt{7400} \approx \sqrt{74 \cdot 100} = 10\sqrt{74} \approx 10 \cdot 8.602 = 86.02 \text{ m}$.

Pasul 3: Calculul Perimetrului

$$P = AB + BC + AC = 50.0 + 70.0 + 86.02 = 206.02 \text{ m}$$

Interpretare practică: Dacă vrem să înconjurăm terenul cu un gard, avem nevoie de aproximativ 206 metri liniari de material.

Pasul 4: Calculul Suprafeței Aria triunghiului dreptunghic = (produsul catetelor) / 2:

$$A = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{50.0 \cdot 70.0}{2} = 1750.0 \text{ m}^2$$

Interpretare practică: Terenul are 1750 m^2 . Dacă impozitul este $1 \text{ leu/m}^2/\text{an}$, se va plăti 1750 lei anual.

Pasul 5: Determinarea Azimutului CA

Metoda 1: Geometrică

$$\angle BAC = \arctan\left(\frac{BC}{AB}\right) = \arctan\left(\frac{70}{50}\right) = \arctan(1.4) \approx 54.46^\circ$$

$$Az_{AC} = Az_{AB} + \angle BAC = 0^\circ + 54.46^\circ = 54.46^\circ$$

$$Az_{CA} = Az_{AC} + 180^\circ = 234.46^\circ$$

Metoda 2: Direct cu coordonate (mai avansat) Presupunem $A(0, 0)$, $B(0, 50)$, $C(70, 50)$.

$$\Delta x = 0 - 70 = -70, \quad \Delta y = 0 - 50 = -50$$

$$Az_{CA} = 180^\circ + \arctan\left(\frac{70}{50}\right) = 180^\circ + 54.46^\circ = 234.46^\circ$$

Răspuns final: $Az_{CA} \approx 234^\circ 28'$ (deoarece $0.46 \cdot 60' \approx 28'$).

III. SET DE 10 EXERCITII PENTRU LECȚIE (cu rezolvări complete)

Exercițiul 1

Enunț: Un teren patrulater are laturile de 32 m, 45 m, 28 m și 39 m. Care este perimetrul său?

Rezolvare:

$$P = 32 + 45 + 28 + 39 = 144 \text{ m}$$

Explicație: Perimetrul este suma tuturor laturilor. În cadastru, acesta dă lungimea totală a limitelor terenului.

Exercițiul 2

Enunț: Un lot de formă pătrată are perimetrul de 200 m. Care este suprafața lui?

Rezolvare:

$$l = \frac{P}{4} = \frac{200}{4} = 50 \text{ m} \quad A = l^2 = 50^2 = 2500 \text{ m}^2$$

Explicație: Pătratul are 4 laturi egale. Suprafața calculată este folosită pentru stabilirea impozitului.

Exercițiul 3

Enunț: Două laturi consecutive ale unui teren dreptunghiular au azimuturile 30° și respectiv 120° . Care este unghiul interior dintre ele?

Rezolvare:

$$\angle = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$$

Explicație: Diferența dintre azimuturi dă unghiul dintre direcții. 90° confirmă că este unghi drept.

Exercițiul 4

Enunț: Calculează diagonala unui teren dreptunghiular de 60 m lungime și 25 m lățime.

Rezolvare:

$$d^2 = 60^2 + 25^2 = 3600 + 625 = 4225 \Rightarrow d = \sqrt{4225} = 65 \text{ m}$$

Explicație: Diagonala se folosește pentru verificarea rectangularității terenului sau pentru trasarea pe teren.

Exercițiul 5

Enunț: Un teren triunghiular are laturile de 17 m, 25 m și 30 m. Calculează semiperimetrul s .

Rezolvare:

$$P = 17 + 25 + 30 = 72 \text{ m} \quad s = \frac{P}{2} = 36 \text{ m}$$

Explicație: Semiperimetrul este necesar pentru aplicarea formulei lui Heron în lecția următoare.

Exercițiul 6

Enunț: Dacă azimutul de la punctul M la punctul N este 215° , care este azimutul de la N la M?

Rezolvare:

$$Az_{NM} = 215^\circ - 180^\circ = 35^\circ$$

Explicație: Regula direct $\pm 180^\circ$ se aplică întotdeauna pentru azimut invers.

Exercițiul 7

Enunț: Un teren sub formă de triunghi echilateral are latura de 48 m. Care este înălțimea lui?

Rezolvare:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{48 \cdot 1.73205}{2} \approx 41.57 \text{ m}$$

Explicație: Înălțimea e utilă pentru calculul ariei.

Exercițiul 8

Enunț: Pentru un triunghi, se cunosc două laturi $a = 15 \text{ m}$, $b = 20 \text{ m}$ și unghiul $C = 60^\circ$ dintre ele. Formula: $A = \frac{1}{2}ab \sin C$. Calculează aria.

Rezolvare:

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.86603$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 \cdot 0.86603 = 150 \cdot 0.86603 \approx 129.90 \text{ m}^2$$

Explicație: Util când se cunosc două laturi și unghiul dintre ele.

Exercițiul 9

Enunț: Unghiul interior la vârful A al unui teren este 75° . Azimutul laturii AC este 290° . Care este azimutul laturii AB?

Rezolvare:

$$Az_{AB} = Az_{AC} - \angle BAC = 290^\circ - 75^\circ = 215^\circ$$

Explicație: Unghiurile interioare și azimuturile sunt strâns legate.

Exercițiul 10

Enunț: Estimează suprafața sălii de clasă folosind pașii tăi, considerând că $1 \text{ pas} \approx 0.8 \text{ metri}$.

Rezolvare exemplu (variabilă): Presupunem:

- 12 pași lungime, 8 pași lățime

$$L \approx 12 \cdot 0.8 = 9.6 \text{ m}, \quad l \approx 8 \cdot 0.8 = 6.4 \text{ m}$$

$$A \approx 9.6 \cdot 6.4 = 61.44 \text{ m}^2$$

Explicație: Metodă de estimare rapidă pentru o primă evaluare.

IV. SET DE 10 EXERCITII PENTRU ACASĂ (TEMA)

Instrucțiuni: Rezolvați următoarele probleme, prezentând toate calculele și explicațiile.

1. Perimetrul complex: Un teren hexagonal are laturile de 18 m, 22 m, 25 m, 19 m, 24 m și 20 m. Calculează perimetrul total.
2. Diagonală și suprafață: Aria unui teren dreptunghiular este 1200 m^2 . Dacă lungimea este de 40 m, calculează:
 - a) Lățimea terenului
 - b) Lungimea diagonalei
 - c) Perimetrul
3. Azimut invers: Azimutul de la punctul X la punctul Y este 305° . Determină azimutul de la Y la X.
4. Semiperimetru pentru formulă: Un triunghi de teren are laturile 14 m, 20 m și 24 m. Calculează semiperimetrul său.

5. Triunghi dreptunghic complet: Două catete sunt 12 m și 35 m. Determină:
 - a) Ipoteenuza
 - b) Perimetrul
 - c) Suprafața
6. Scară și dimensiuni reale: Pe un plan cadastral la scară 1:500, o latură măsoară 6.8 cm. Câți metri are în realitate?
7. Formă specială - Romb: Un teren în formă de romb are diagonalele de 32 m și 24 m. Calculează aria sa.
8. Verificare unghi: În patrulaterul ABCD, unghiul interior la B este 110° . Dacă azimutul BA este 40° și azimutul BC este 150° , verifică corectitudinea unghiului.
9. Unghi între direcții: Azimutul PQ este 80° , iar azimutul PR este 170° . Care este mărimea unghiului QPR?
10. Problemă aplicativă - Împărțire teren: Un teren triunghiular dreptunghic are catetele de 90 m și 120 m. Un dezvoltator vrea un drum paralel cu cateta mică (90 m) care să împartă terenul în două părți de arii egale. La ce distanță de vârful unghiului drept trebuie să fie drumul?

V. REZOLVĂRI SCHEMATICE PENTRU TEMA

(Atenție: Acestea sunt rezolvări scurte. În caiet, prezentați calculele complete.)

1. $18 + 22 + 25 + 19 + 24 + 20 = 128$ m
2. a) $1200/40 = 30$ m; b) $\sqrt{40^2 + 30^2} = 50$ m; c) $2(40 + 30) = 140$ m
3. $Az_{YX} = 305^\circ - 180^\circ = 125^\circ$
4. $s = (14 + 20 + 24)/2 = 29$ m
5. a) $\sqrt{12^2 + 35^2} = 37$ m; b) $12 + 35 + 37 = 84$ m; c) $(12 \cdot 35)/2 = 210$ m²
6. $6.8 \text{ cm} \cdot 500 = 3400 \text{ cm} = 34$ m
7. $A = (32 \cdot 24)/2 = 384$ m²
8. $\angle B = 150^\circ - 40^\circ = 110^\circ$ (corect)
9. $\angle QPR = 170^\circ - 80^\circ = 90^\circ$
10. Aria totală $= (90 \cdot 120)/2 = 5400$ m², jumătate $= 2700$ m². Raport arii $= 1/2 \Rightarrow$ raport liniar $= \sqrt{1/2}$. Distanța $= 90 \cdot 0.7071 \approx 63.64$ m.